



CÉCILE KHAROUBI-RAKOTOMALALA

LES FONCTIONS COPULES EN FINANCE

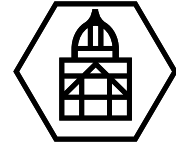


Depuis quelques années, la recherche financière s'inscrit dans une nouvelle dynamique. La nécessité de mieux modéliser le comportement des rendements des actifs financiers et les risques sur les marchés pousse les chercheurs à emprunter des méthodes et des outils à d'autres disciplines scientifiques comme la biologie, la physique, ou les statistiques. Ces méthodes permettent de mieux expliquer, appréhender et prévoir les évolutions futures des cours boursiers. Cet ouvrage se situe dans cette évolution ; ayant admis la non-normalité des rendements univariés, l'auteur présente des mesures de dépendance alternatives au coefficient de corrélation linéaire afin de modéliser les comouvements des marchés financiers. Après avoir présenté

cette nouvelle méthodologie, trois études empiriques sont conduites. Les marchés des indices internationaux d'actions que les hedge funds sont aussi examinés dans le but d'étudier l'impact de la structure de dépendance sur la gestion des risques et la diversification. Enfin, cet ouvrage propose une étude des déterminants de l'évolution du degré de dépendance afin d'identifier ce qui permettrait d'expliquer les variations des comouvements des marchés.

Docteur en sciences de gestion de l'université Paris-Dauphine et l'ESSEC, Cécile Kharoubi-Rakotomalala est professeur de finance de marché à ESCP-EAP. Ses travaux portent sur la modélisation de la dépendance des marchés actions, la gestion des risques et les hedge funds.

VIENT DE PARAÎTRE



BON DE COMMANDE

LES FONCTIONS COPULES EN FINANCE

CÉCILE KHAROUBI-RAKOTOMALALA

Prix : 24 €

Frais d'envoi par ouvrage : 6 € et 1,5 € par ouvrage supplémentaire

Nombre d'exemplaires commandés :

Mme, M.

Adresse

Code postal et ville

Tél.:

Date

Signature

Veillez libeller votre titre de paiement à l'ordre de
l'Agent comptable de Paris I (PS)

**Bon de commande
et titre de paiement à retourner aux**

Publications de la Sorbonne
212, rue Saint-Jacques, 75005 Paris
Tél. : 01 43 25 80 15
Fax : 01 43 54 03 24
publisor@univ-paris1.fr

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	7
UNE ALTERNATIVE AU COEFFICIENT DE CORRÉLATION : LES COPULES	
Introduction	13
<i>Chapitre 1.</i> Pourquoi le coefficient de corrélation n'est-il pas une bonne mesure de dépendance ?	17
<i>Chapitre 2.</i> Représentation des distributions multivariées par les copules	19
2.1. Définitions et propriétés	19
a. Définitions	19
b. Dépendances sur les queues de distributions	21
c. Pourquoi les copules sont-elles de bonnes mesures de dépendance ?	22
2.2. La place des copules en sciences	23
a. En statistiques	23
b. En assurance	24
c. En finance	25
2.3 Présentation des copules les plus utilisées	27
a. La copule gaussienne	27
b. Les copules archimédiennes	28
(i) La copule de Frank	29
(ii) La copule de Gumbel	29
(iii) La copule Cook-Johnson	30

<i>Chapitre 3.</i> Procédure d'estimation	33
3.1. Maximum de vraisemblance	33
3.2. Méthode des moments	35
<i>Chapitre 4.</i> Procédure de sélection : quelle est la copule optimale ?	37
4.1. Fonction de distribution empirique	38
a. Genest et Rivest (1993)	38
b. Deheuvels (1979)	38
c. Critères de sélection	43
4.2. Fonction de densité empirique	45
a. Méthode du noyau	45
b. Critères de sélection	47

APPLICATIONS EMPIRIQUES

<i>Chapitre 1.</i> Mesure de risque sur les marchés internationaux des indices d'actions	51
1.1. Présentation des données	52
1.2. Estimation et sélection	57
1.3. Calcul de Value-at-Risk par simulations Monte-Carlo	64
a. Les simulations Monte-Carlo	64
b. La value-at-Risk	65
Conclusion	70
<i>Chapitre 2.</i> Une analyse non linéaire des risques : le cas des hedge funds	71
2.1. Définitions, industrie et stratégies : une revue de littérature	73
a. L'industrie des hedge funds : définitions et description	73
b. Les différentes stratégies	75
c. Les biais relatifs aux données sur hedge funds	78

2.2. Revue de littérature	79
a. L'évaluation de la performance des hedge funds	79
b. Les difficultés de l'évaluation des performances.	80
c. Les styles de gestion	80
d. Hedge funds et crises financières	81
e. Hedge funds et diversification	81
2.3. Présentation des données	81
a. Statistiques descriptives et non-normalité	82
b. Analyse des corrélations et variété	85
2.4. Étude de la diversification par les copules	89
a. les comportements marginaux	89
b. La dépendance des hedge funds	90
2.5. Classement des fonds et mesure de performances	94
a. Les mesures de performances.	94
(i) Le ratio Sharpe : un <i>benchmark</i>	94
(ii) Le d-ratio	95
(iii) Le VaR-ratio.	96
(iv) Le Sortino ratio	97
b. Analyses des résultats.	98
2.6. Le rôle des hedge funds : compléter le marché	97
Conclusion	100
<i>Chapitre 3. Pourquoi la dépendance change-t-elle ?</i>	101
3.1. Stabilité de la structure de dépendance.	103
a. Présentation des données	103
b. La fonction de dépendance comme mesure alternative des comouvements	105
3.2. Les déterminants de la variabilité du degré de dépendance.	109
a. La dynamique du degré de dépendance	110
(i) La volatilité	112
(ii) Le sens du marché.	113
(iii) La persistance	115

b. Les déterminants de la dépendance.	117
(i) L'inflation	117
(ii) Le taux de change	118
(iii) L'indice de confiance	119
(iv) Les dividendes	120
(v) Les volumes.	122
(vi) La liquidité.	123
(vii) Analyse multivariée	125
c. Analyse des résultats.	128
3.3. Pourquoi la dépendance varie-t-elle ?.	130
a. Relation entre le risque et l'aversion pour le risque	130
b. Relation entre l'aversion pour le risque et l'asymétrie de la dépendance.	131
Conclusion	133
Conclusion générale.	135
Bibliographie.	137

Introduction générale

La théorie financière moderne peut être datée de 1952 avec les travaux de Markowitz. Elle se distingue de la finance traditionnelle qui est descriptive et basée sur l'analyse comptable et financière et les méthodes actuarielles. La théorie financière moderne s'est considérablement développée aussi bien au sein des universités qu'au sein des entreprises qui se sont progressivement appropriées les méthodes et concepts développés par la théorie. Les innovations pratiques majeures ont été influencées et même générées par des développements théoriques. Le meilleur exemple reste sans aucun doute le marché des produits dérivés qui a connu un véritable essor après les travaux de Black, Scholes et Merton en 1973 qui permettaient d'évaluer ces produits (les options).

Tous ces résultats majeurs comme la théorie de l'évaluation par arbitrage, la théorie des options, le modèle d'évaluation des actifs financiers ou les modèles de gestion des risques, reposent sur l'hypothèse centrale de normalité des rendements des titres financiers ou sur l'hypothèse alternative que les agents ont des fonctions d'utilité quadratiques. Ces hypothèses signifient que les variations du taux de rentabilité d'un actif financier quelconque peuvent être représentées formellement par un processus aléatoire stable à accroissements indépendants et stationnaires, dont la loi marginale est une variable aléatoire suivant une loi Gaussienne. Ainsi, toute stratégie d'investissements sera fondée, en dernière analyse, sur l'espérance mathématique et l'écart-type du taux de rentabilité de l'actif considéré.

Dès 1965, Eugène Fama constatait que les rendements d'actions présentaient des distributions leptokurtiques (donc non gaussiennes). Depuis le début des années 1980, une grande partie de la recherche empirique démontre le caractère non gaussien des rendements, quels que soient les actifs considérés. Cette constatation sera amplifiée par les événements boursiers tel que le crash de 1987 où les modèles théoriques ne parvenaient pas à expliquer les déviations de prix observés des options sur indices boursiers de ceux basés sur le modèle de Black, Scholes et Merton.

Bien que de nombreux auteurs aient documenté l'existence d'asymétrie et de queues épaisses sur les distributions univariées des rendements, très peu se sont

demandés si le coefficient de corrélation linéaire était toujours valable comme mesure de dépendance dans un univers non gaussien. Ainsi, après avoir étudié l'hypothèse de normalité univariée, il est logique d'étudier si cette hypothèse a un impact sur la mesure des comouvements de marchés.

D'autre part, tous les modèles classiques de la théorie financière moderne font l'hypothèse que le coefficient de corrélation est constant dans le temps. Encore une fois, de nombreuses études ont démontré que la dépendance des actifs n'est pas constante.

Depuis quelques années, la recherche financière s'inscrit dans une nouvelle dynamique. La nécessité de mieux modéliser le comportement des rendements des actifs financiers et les risques sur les marchés, poussent les chercheurs à emprunter des méthodes et des outils à d'autres disciplines scientifiques comme la biologie, la physique, les statistiques. Ces méthodes permettent de mieux expliquer, appréhender et prévoir les évolutions futures des cours boursiers. Ces travaux se situent dans cette évolution ; ayant admis la non normalité des rendements univariés, nous étudierons des mesures de dépendances alternatives au coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation est un nombre qui décrit les relations entre deux variables aléatoires. La relation entre deux variables aléatoires peut être quantifiée par la covariance, qui, à l'image de la moyenne et de la variance, est un moment et possède donc une dimension ce qui la rend plus difficile à interpréter. C'est pourquoi on utilise plus généralement le coefficient de corrélation, indicateur sans dimension, défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

De nombreux papiers de recherche ont porté sur l'étude du comportement empirique du coefficient de corrélation linéaire sur les marchés financiers. Ces études peuvent être classées autour de cinq thèmes principaux :

- la corrélation des rentabilités et la volatilité : les comouvements augmentent quand les marchés sont agités¹ ;
- l'asymétrie de la corrélation des rentabilités : la dépendance est plus forte quand les deux marchés sont baissiers ou asynchrones que lorsqu'ils sont hausiers². Or, beaucoup d'intervenants se reposent sur une stratégie de diversification internationale pour investir. Pour ces investisseurs, le fait que la corrélation augmente avec la volatilité est problématique puisque les bénéfices sont réduits au moment où ils sont le plus attendus ;

1. Bennett et Kelleher (1988), Bertero et Mayer (1989), Lee et Kim (1993), Solnik, Boucrelle et Lefur (1996).

2. Erb, Harvey et Viskantha (1994), Login et Solnik (2001).

– la tendance à long terme de la corrélation des rentabilités : la corrélation des rendements des marchés actions a augmenté sur trente ans de 1960 à 1990³ ;

– la contagion (corrélation de la volatilité) : l'évidence de la contagion a été observée dans un certain nombre d'études. Quatre méthodes différentes ont été utilisées pour mesurer comment les chocs sont transmis internationalement : (i) par le coefficient de corrélation linéaire⁴, (ii) à l'aide de processus ARCH/GARCH⁵, (iii) par la technique de cointégration⁶, (iv) et enfin l'estimation directe des mécanismes de transmissions ;

– la diversification des risques : la diversification est un principe selon lequel il est possible de diminuer le risque d'un portefeuille en incorporant un certain nombre d'actifs, tout en maintenant un certain niveau de rendement. Cette notion a été introduite par Sharpe (1963, 1972). Un investisseur qui cherche à diversifier son portefeuille va toujours sélectionner une combinaison d'actifs ou de positions qui procurera le rendement maximal pour le risque minimal⁷. Cet objectif est atteint par le mécanisme de la corrélation, ou du degré avec lequel un actif varie par rapport à l'ensemble des actifs. Diversifier son portefeuille sur la base de la corrélation assure intuitivement que tous les actifs du portefeuille ne varieront pas dans les mêmes proportions au même moment. Quand certains actifs augmentent, d'autres seront à la baisse, et le rendement du portefeuille sera stable. Bien que le principe de diversification soit très largement accepté et appliqué, comparativement très peu d'études ont été menées sur le sujet. Suite au papier de Sharpe (1963), Evans et Archer (1968) s'y sont intéressés et ont cherché à connaître quel était le nombre d'actifs à détenir en portefeuille pour atteindre la meilleure diversification. Leurs résultats suggèrent qu'il existe une relation stable et prévisible entre le nombre d'actifs détenus en portefeuille et le niveau de dispersion des rendements du portefeuille. À partir de dix actions, l'essentielle de la diversification est atteinte. Pour Solnik (1974), le risque systémique est défini pour un marché géographique donné. Si on incorpore en portefeuille des actions d'un autre marché, il est possible de réduire le risque systémique qui était jusqu'alors incompressible. Enfin De Santis et Gerard (1997) examinent si les bénéfices attendus de la diversification internationale sont affectés par l'intégration croissante des marchés financiers internationaux et si un portefeuille internationalement diversifié procure une bonne couverture contre les mouvements baissiers des marchés américains. En utilisant des processus GARCH multivariés, ils montrent que les mouvements baissiers des marchés américains sont fortement contagieux et impliqueraient une diminution

3. Bennett et Kelleher (1988), Longin et Solnik (1995).

4. King et Wadhvani (1990), Lee et Kim (1993).

5. Hamao, Masulis et Ng (1990).

6. Longin et Solnik (1995).

7. Les plus forts rendements moyens pour la plus faible volatilité de ces rendements.

des bénéfiques de la diversification internationale. Toutefois, une diversification internationale reste économiquement attractive sur le long terme.

Toutes les études que nous venons de présenter font l'hypothèse implicite que le coefficient de corrélation est un indicateur de dépendance générique. Or comme nous le montrerons dans le premier chapitre, cette hypothèse est fautive en dehors du cadre gaussien multivarié.

Dans la première partie, nous commençons par expliquer pourquoi le coefficient de corrélation linéaire n'est pas une bonne mesure de dépendance, puis nous proposons un outil alternatif au coefficient de corrélation comme mesure de dépendance appelé fonction copule. Cet outil vient de la théorie statistique. Nous rappellerons les propriétés de ces fonctions copules. Puis, dans un troisième chapitre, nous présenterons deux méthodes d'estimation qui permettent de séparer l'estimation des distributions marginales et l'estimation de la fonction de dépendance. Enfin, dans le dernier chapitre, nous proposons deux méthodes de sélection de la copule optimale en fonction de l'application considérée.

Dans une seconde partie, nous présentons trois applications empiriques. Dans un premier temps, nous considérons les marchés des indices internationaux d'actions et étudions l'impact de la structure de dépendance sur la gestion des risques. Dans le second chapitre, nous appliquons notre méthodologie au marché des hedge funds et analysons les mécanismes de diversification. Enfin, le dernier chapitre présente une étude des déterminants de l'évolution du degré de dépendance.

« Les vraies richesses, ce sont les méthodes. »

NIETZCHE

Conclusion générale

Les apports de ces travaux sont multiples. D'un point de vue théorique, nous proposons deux méthodes originales qui permettent de sélectionner la structure de dépendance optimale. De plus, cette méthodologie nous permet d'une part de rejeter l'hypothèse de normalité pour la structure de dépendance, et d'autre part, de caractériser la dépendance des marchés internationaux d'indices sur actions : la dépendance des marchés financiers est donc asymétrique avec une corrélation asymptotique sur les rendements négatifs qui n'est pas présente sur les rendements positifs.

Outre cela, la représentation par copule nous a permis d'analyser les bénéfices de la diversification apportés par les hedge funds aux classes d'actifs traditionnels. Ainsi, l'analyse non linéaire de la dépendance montre que les hedge funds ne sont pas de bons diversificateurs (copule Cook-Johnson), hormis les indices market-neutral qui présentent des caractéristiques multivariées différentes (copule de Frank).

Enfin, la décomposition par fonction de dépendance nous a permis d'étudier de manière directe et sans biais l'évolution temporelle des comouvements de marchés. Ainsi, alors que la structure de dépendance a été stable sur les dix dernières années concernant les marchés internationaux de capitaux, le degré de la dépendance est variable dans le temps. Après avoir analysé les déterminants de la dynamique des comouvements, nous en déduisons une relation fondamentale expliquant les variations de la dépendance : plus le risque perçu augmente et plus la dépendance augmente. Plus précisément, quand le risque perçu augmente, l'aversion pour le risque augmente et cette augmentation génère une asymétrie plus forte sur la dépendance.

Nous avons montré que cette méthode statistique induit des améliorations dans le cadre théorique de la finance. Dans ces travaux, nous avons appliqué la méthodologie par copules à la gestion des risques des indices internationaux d'actions, à la diversification apportée par les hedge funds, et enfin à l'étude de la dynamique du degré de dépendance. Cependant, cette méthodologie peut être appliquée à un grand nombre de sujet partout où le coefficient de corrélation linéaire était précédemment utilisé. Ainsi, en théorie des options pour évaluer

les options écrites sur plusieurs sous-jacents, ou en théorie du portefeuille pour évaluer le risque systématique des actifs. D'un point de vue plus pratique, les traders qui ont des positions sur des indices ou des paniers d'actions, couvrent leurs positions en corrélation. Il serait donc possible d'améliorer les stratégies de couvertures en prenant en compte correctement la nature des comouvements de marchés.